REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : 1998

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

3 heures

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. L'USAGE DES CALCULATRICES N'EST PAS AUTORISÉ.

IL EST RAPPELÉ QUE TOUT RÉSULTAT ÉNONCÉ DANS LE TEXTE PEUT ÊTRE UTILISÉ POUR TRAITER LA SUITE, MÊME S'IL N'A PU ÊTRE DÉMONTRÉ .

$\mathbb{R}[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à n.
On rappelle que, pour P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec a_n différent de zéro, n est le degré de P et a_n s'appelle le coefficient dominant de P.

PARTIE I

Etude de l'application ϕ

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \to & \phi(P) \end{array}$$

telle que

$$\phi(P)(X) = (\frac{d^2P}{dX^2} - 2X\frac{dP}{dX})(X)$$

On se propose de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres H_n de l'application ainsi définie.

A-Valeurs propres et vecteurs propres

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace stable par ϕ.

   On notera ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Calculer la matrice A_n de ϕ_n relativement à la base canonique $\{1, X, ..., X^n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Déterminer les valeurs propres de ϕ_n et en déduire que ϕ_n est diagonalisable.
6. En déduire que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme H_n de coefficient dominant égal à 1 tel que
$$\phi(H_n) = -2nH_n$$
7. Montrer que le degré du polynôme H_n est égal à n.
8. Calculer $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$ et $H_3(X)$.

B- Propriétés de H_n

1. Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a
$$H_{n+1}(X) = XH_n(X) - \frac{1}{2}\frac{dH_n}{dX}(X)$$
2. En déduire que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{d}{dX}H_n(X) = nH_{n-1}(X)$$
3. Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a
$$2H_{n+1}(X) - 2XH_n(X) + nH_{n-1}(X) = 0$$
4. Montrer que H_{2n} est pair et H_{2n+1} est impair, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
5. Soit $S_0 = 1$ et, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on définit
$$S_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$
   (a) Montrer que S_n est un polynôme de degré n. Calculer son coefficient dominant.
   (b) En déduire que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$
$$H_n(X) = \frac{(-1)^n}{2^n}S_n(X)$$

PARTIE II

Struture préhilbertienne de $\mathbb{R}[X]$

1. Montrer que, pour tout couple de polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, la fonction qui:
$$x \to P(x)Q(x)e^{-x^2}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On notera
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$$

2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \to & \langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $||P|| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire.

3. Vérifier que, pour tout couple P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on a

$$\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle$$

4. En déduire que les $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

5. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme H_n est orthogonal à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

6. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout polynôme P de la forme X^n+U où U appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$||H_n|| \leq ||P||$$

7. Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a

$$||H_{n+1}||^2 = \frac{n+1}{2}||H_n||^2$$

8. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Déterminer $||H_n||$.

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

9. (a) Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, H_n a n zéros réels et distincts.
(On pourra démontrer que, dans le cas contraire, il existerait un polynôme Q de degré strictement inférieur à n tel que, pour tout x réel, $H_n(x)Q(x) \geq 0$ et cela permettra d'achever la démonstration).

(b) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, démontrer qu'entre deux zéros consécutifs quelconques de H_{n+1}, il existe un zéro et un seul de H_n.

PARTIE III

Résolution d'une équation aux dérivées partielles

On note par $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des fonctions de deux variables réelles (x,t) de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles de classes $\mathcal{C}^2$.
On appelle fonctions polynômiales en x et t les fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ qui s'écrivent sous la forme:

$$Q(x,t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k$$

où, n appartient à $\mathbb{N}$ et pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, P_k appartient à $\mathbb{R}[X]$.

Étant donné l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{1}$$

où C est une constante strictement positive. On note E l'espace vectoriel des solutions polynômiales de (1) et, pour n appartient à $\mathbb{N}$, E_n le sous espace vectoriel des solutions polynômiales de (1) qui s'écrivent sous la forme:

$$Q(x,t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k$$

L'objectif de cette partie est la construction d'une base du sous espace vectoriel E_n.

A - Recherche de solutions de (1) sous la forme de produit

Soit g une fonction de la forme

$$g(x,t) = f(x)h(t) \tag{2}$$

où f et h sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) \neq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $h(t) \neq 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que g est une solution de (1) si et seulement si, il existe un nombre réel α tel que
$$f''(x) = \frac{\alpha}{C}f(x)$$
$$h'(t) = -\alpha h(t)$$
2. En déduire l'ensemble des solutions de (1) définie sur $\mathbb{R}^2$ qui s'écrivent sous la forme (2).

B- Expression d'une solution polynômiale

Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Soit Q une fonction polynômiale de E_n.

1. Calculer P_n'' et exprimer P_k'' en fonction de P_{k+1} lorsque l'entier k est strictement inférieur à n.
2. En déduire l'expression de P_k, puis de Q en fonction de P_0.
3. En déduire la dimension du sous espace vectoriel E_n.

C- Solutions en fonction de H_k

Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$ et k appartenant à $\mathbb{N}$ telle que $0 \leq k \leq 2n$. Soit la fonction f_k définie, pour tout (x,t) appartenant à $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, par

$$f_k(x,t) = t^{\frac{k}{2}} H_k\left(\frac{x}{2\sqrt{Ct}}\right)$$

1. Montrer que f_k est une solution de (1) sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
2. Montrer que f_k se prolonge en une solution polynômiale Q_k de (1) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Donner l'expression de Q_k à l'aide des coefficients de H_k.
4. En déduire les coefficients de H_{2k} et de H_{2k+1}.
5. Donner une base de E_n.